WYKŁAD
CIĄGI LICZBOWE cz. 1

DEFINICJA

Funkcja $f : X \to Y$ **odwzorowująca zbiór** X **w zbiór** Y jest to przyporządkowanie każdemu elementowi x ze zbioru X dokładnie jednego elementu y ze zbioru Y.

Jeśli elementowi $x \in X$ przyporządkowano element $y \in Y$, to będziemy pisać $y = f(x)$, x będziemy nazywać **argumentem funkcji** f, a y - **wartością funkcji** f odpowiadającą argumentowi x.

DEFINICJA

Funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych nazywamy **ciągiem liczbowym**.

Wartości tej funkcji nazywamy **wyrazami ciągu** i oznaczamy $f(n) = a_n$.

DEFINICJA. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **niemalejącym** jeśli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **rosnącym** jeśli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **nierosnącym** jeśli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **malejącym** jeśli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n > a_{n+1}.$$

DEFINICJA.

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **ograniczonym z góry** jeżeli zbiór jego wyrazów jest ograniczony z góry, tj.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant M.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **ograniczonym z dołu** jeżeli zbiór jego wyrazów jest ograniczony z dołu, tj.

$$\bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant m.$$

Ciąg ograniczony z dołu i z góry nazywamy **ograniczonym**.

DEFINICJA. Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz, z wyjątkiem pierwszego, różni się od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego o stałą liczbę różną od zera, zwaną **różnicą ciągu**

$$\bigvee_{r \in \mathbb{R}} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} a_n - a_{n-1} = r$$

DEFINICJA. Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg, w którym stosunek dowolnego wyrazu, z wyjątkiem pierwszego, do wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego jest stały.

$$\bigvee_{q \in \mathbb{R}} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu**.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

DEFINICJA.

Otoczeniem punktu x_0 **o promieniu** ε nazywamy zbiór

$$O(x_0, \varepsilon) = \{x : | x - x_0 |< \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

DEFINICJA.

Sąsiedztwem punktu x_0 **o promieniu** ε nazywamy zbiór

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x : 0 <| x - x_0 |< \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

DEFINICJA.

Prawostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy zbiór

$$S_+(x_0, \varepsilon) = \{x : 0 < x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

DEFINICJA.

Lewostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy zbiór

$$S_-(x_0, \varepsilon) = \{x : -\varepsilon < x - x_0 < 0\} = (x_0 - \varepsilon; x_0).$$

DEFINICJA.

Zbiór

$$S(+\infty, \varepsilon) = \{x : x > \varepsilon\} = (\varepsilon, +\infty)$$

nazywamy **sąsiedztwem** $+\infty$.

Zbiór

$$S(-\infty, \varepsilon) = \{x : x < \varepsilon\} = (-\infty, \varepsilon)$$

nazywamy **sąsiedztwem** $-\infty$.

Mówimy, że **prawie wszystkie wyrazy ciągu** spełniają pewien warunek (A), jeśli co najwyżej skończona liczba wyrazów tego ciągu *nie* spełnia warunku (A), a wszystkie pozostałe wyrazy ciągu spełniają warunek (A).

DEFINICJA. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **zbieżnym do liczby** g, jeżeli prawie wszystkie wyrazy tego ciągu należą do dowolnego otoczenia liczby g o promieniu ε, tj.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} | a_n - g | < \varepsilon.$$

Będziemy wówczas pisać $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, a liczbę g będziemy nazywać **granicą ciągu** $\{a_n\}$.

DEFINICJA.

Ciąg, który nie jest zbieżny nazywać będziemy ciągiem **rozbieżnym**.

Bezpośrednio z definicji wynika, że ciąg jest rozbieżny jeśli

$$\bigwedge_{g} \bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{n_0} \bigvee_{n>n_0} | a_n - g | \geqslant \varepsilon.$$

Oznacza to, że dla dowolnej liczby g nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$ leży poza pewnym jej otoczeniem.

DEFINICJA.

Granica ciągu zbieżnego jest wyznaczona jednoznacznie.

TWIERDZENIE.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, to

$$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n > 0.$$

TWIERDZENIE.

Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że

$$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n > b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant b.$$

TWIERDZENIE.

Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że

$$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n > b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant b.$$

TWIERDZENIE.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do liczby g jest zbieżność ciągu $\{a_n - g\}$ do zera.

TWIERDZENIE.

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.